Exponenciální funkce - jejich "využití" při řešení diferenciálních rovnic

(Tato doplňková pomůcka nemůže v žádném případě nahradit systematickou matematickou přípravu .)

Vlastností exponenciální funkce lze výhodně použít při řešení diferenciálních rovnic. Zaměříme se na řešení lineárních diferenciálních rovnic 1. a 2. řádu s konstantními koeficienty, které mají zásadní význam při řešení lineárních elektrických obvodů. Obecně jsou obvody popsány i diferenciálními rovnicemi vyšších řádů, ale to již představuje jen rozšíření základních úvah.

Řešení diferenciálních rovnic 1. řádu (lineárních, s konstantními koeficienty)

Mějme obvodovou funkci $y = f(x)$, kde y může být elektrický proud, elektrické napětí, magnetický tok, ... Obvody 1. řádu jsou potom modelovány nehomogenní rovnicí ("s pravou stranou", $y' = dy/dx$)

$$y' + ay = g(x) \tag{1}$$

$g(x)$ je "budicí" funkce (proud, napětí, ...)
a je konstanta definovaná obvodovými prvky (*R, L, C, M, ...*).

Vlastnosti samotného obvodu jsou vlastně definovány již samotnou ***homogenní rovnicí***, která přísluší k rovnici (1)

$$y' + ay = 0 \tag{2}$$

(prostě "odstraníme" pravou stranu). ***Řešením homogenní rovnice*** je nějaká funkce y_h, která splňuje podmínku

$$y_h' + ay_h = 0 \tag{3}$$

Dále nechť existuje nějaké známé ***partikulární řešení*** y_p, které vyhovuje rovnici (1) - ta v sobě zahrnuje i situaci "vnucenou" funkcí $g(x)$. Platí tedy, že

$$y_p' + ay_p = g(x) \tag{4}$$

Snadno ukážeme, že potom je ***celkovým řešením rovnice*** (1) součet řešení $y = y_h + y_p$, prostě dosadíme do (1) a uvážíme platnost (3) a (4):

$$(y_h' + y_p') + a(y_h + y_p) = y_h' + ay_h + y_p' + ay_p = 0 + g(x)$$

Řešení homogenní diferenciální rovnice 1. řádu

Předpokládejme, že homogenní rovnici (2) vyhoví nějaká exponenciální funkce $y_h = K \cdot e^{\lambda x}$. Pokud má vyhovovat, musí platit (viz derivace exponenciální funkce):

$$y_h' + ay_h = \lambda K e^{\lambda x} + aKe^{\lambda x} = Ke^{\lambda x}(\lambda + a) = 0 \qquad (5)$$

Je zřejmé, že homogenní rovnice (5) může být splněna jen tehdy, platí-li (***charakteristická rovnice***)

$$\lambda + a = 0 \Rightarrow \lambda = -a \qquad (6)$$

Partikulární řešení diferenciální rovnice 1. řádu - pro $g(x) = G$ **(*konstanta*)**

V tomto jednoduchém případě stačí hledat řešení ve tvaru $y_p = A$ (rovněž konstanta, nejčastěji popisuje stejnosměrný zdroj proudu nebo napětí). Dosaďme A do (1), tedy

$$(A)' + aA = G \Rightarrow A = G/a \qquad (7)$$

protože derivace konstanty je rovna nule. **Celkové** (obecné) **řešení** je v tomto případě definováno součtem

$$y = Ke^{-ax} + G/a \qquad (8)$$

Je zřejmé, že vztah (8) vlastně definuje nekonečně mnoho podobných řešení pro různá *K*. Musíme určit tuto konstantu pomocí nějakého známého bodu řešení, nejčastěji pomocí známé ***počáteční hodnoty (podmínky)*** y_0 pro $x = 0$. Potom

$$y_0 = Ke^{-a0} + G/a \Rightarrow K = y_0 - G/a \qquad (9)$$

Z povahy vztahu (8) je zřejmé, že pro $x \to \infty$ vždy platí $y_\infty = Ke^{-a\infty} + G/a = 0 + G/a$ a proto se řešení diferenciálních rovnic 1. řádu s konstantou na pravé straně často zapisuje ve tvaru

$$\boxed{y = (y_0 - G/a)e^{-ax} + G/a = (y_0 - y_\infty)e^{-ax} + y_\infty} \qquad (10)$$

Vzhledem k určování konstanty *K* příslušející řešení homogenní rovnice se někdy říká, že *homogenní rovnice popisuje odezvu systému na počáteční podmínky. Partikulární řešení je "vnuceno" funkcí g(x).*

Partikulární řešení diferenciální rovnice 1. řádu - pro $g(x) = G_m \sin(kx + \varphi)$

Budicí funkci je vhodné upravit do podoby (goniometrické funkce součtu úhlů):

$$g(x) = G_m(\sin kx \cdot \cos\varphi + \cos kx \cdot \sin\varphi) = G_1 \sin kx + G_2 \cos kx$$
$$G_1 = G_m \cos\varphi; \quad G_2 = G_m \sin\varphi; \quad G_1^2 + G_2^2 = G_m^2; \quad G_2/G_1 \mathrm{tg}\varphi$$

Potom předpokládejme partikulární řešení ve tvaru $y_p = A\cos kx + B\sin kx$, odkud snadno určíme, že $y_p' = kA(-\sin kx) + kB\cos kx$. Dosazením uvedených vztahů do rovnice (1) obdržíme po úpravách relaci

$$(-kA + aB)\sin kx + (kB + aA)\cos kx = G_1 \sin kx + G_2 \cos kx$$

Musí proto platit, že

$$-kA + aB = G_1$$
$$aA + kB = G_2$$

Řešením získaného souboru dvou rovnic zjistíme, že

$$A = \frac{aG_2 - kG_1}{a^2 + k^2}; \qquad B = \frac{kG_2 + aG_1}{a^2 + k^2} \tag{11}$$

Celkové (obecné) **řešení** je v tomto případě definováno součtem

$$\boxed{y = Ke^{-ax} + A\cos kx + B\sin kx = Ke^{-ax} + Y_m \sin(kx + \psi)} \tag{12}$$

uděláme-li substituci $A = Y_m \sin\psi$; $B = Y_m \cos\psi$, tedy $Y_m^2 = A^2 + B^2$; $\mathrm{tg}\psi = A/B$.

Řešení diferenciálních rovnic 2. řádu (lineárních, s konstantními koeficienty)

Obvody 2. řádu jsou modelovány nehomogenní rovnicí ("s pravou stranou", $y'' = d^2y/dx^2$)

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x) \tag{13}$$

$g(x)$ je "budicí" funkce (proud, napětí, ...)
a_1, a_0 jsou konstanty definované obvodovými prvky (*R, L, C, M, ...*).

Řešení opět rozložíme na řešení homogenní rovnice

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{14}$$

a nalezení nějakého partikulárního řešení y_p.

Řešení homogenní diferenciální rovnice 2. řádu

Předpokládejme, že homogenní rovnici (14) vyhoví nějaká exponenciální funkce $y_h = K \cdot e^{\lambda x}$. Snadno určíme, že $y_h' = K \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} = \lambda y_h$; $y_h'' = (y_h')' = K \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} = \lambda^2 y_h$. Po dosazení do (14) a úpravách určíme, že musí platit:

$$y_h \cdot (\lambda^2 + a_1\lambda + \lambda a_0) = 0 \tag{15}$$

Vztah (15) lze splnit, nabývá-li ***charakteristický polynom*** $\lambda^2 + a_1\lambda + \lambda a_0$ diferenciální rovnice druhého řádu nulové hodnoty, tedy je-li splněna charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + a_1\lambda + \lambda a_0 = 0 \tag{16}$$

V tomto jednoduchém případě se musí řešit pouze kvadratická rovnice. Získáme dva kořeny

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} \tag{17}$$

Homogenní řešení je tedy popsáno lineární kombinací odpovídající oběma kořenům:

$$y_h = K_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + K_2 \cdot e^{\lambda_2 x} \tag{18}$$

Partikulární řešení diferenciální rovnice 2. řádu - pro $g(x) = G$ **(*konstanta*)**

V tomto případě je nalezení partikulárního řešení snadné. Opět předpokládáme, že $y_P = A$, první i druhá derivace konstanty jsou nulové. Proto po dosazení do (13) snadno určíme, že musí platit

$$a_0 A = G \Rightarrow A = G / a_0 \tag{19}$$

Celkové řešení nabývá podoby

$$\boxed{y = K_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + K_2 \cdot e^{\lambda_2 x} + G / a_0} \tag{20}$$

Pro ***určení dvou konstant*** potřebujeme znát dvě podmínky řešení. Známe-li $y_O = y(x=0)$ a první derivaci $y'_O = y'(x=0)$, potom po dosazení do (20) a derivovaného vztahu (20) určíme, že

$$y_0 = K_1 \cdot e^{\lambda_1 0} + K_2 \cdot e^{\lambda_2 0} + G / a_0 = K_1 + K_2 + G / a_0$$
$$y'_0 = K_1 \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 0} + K_2 \lambda_2 \cdot e^{\lambda_2 0} = K_1 \lambda_1 + K_2 \lambda_2$$

Z těchto údajů jsme již schopni obě konstanty určit.

Jsou-li oba kořeny reálné a záporné*, bude přechodný děj (pro x → t) aperiodický, bez zákmitů.*

Je-li kořen kvadratické rovnice reálný a dvojný ($\lambda_{1,2} = \lambda$) má řešení homogenní rovnice tvar

$$\boxed{y = K_1 \cdot e^{\lambda x} + K_2 \cdot x \cdot e^{\lambda x}} \tag{21}$$

další postup je stejný.

Pro dvojný kořen záporné hodnoty se jedná právě o ***mez aperiodicity*** - *přechodný děj je "nejrychlejší" a ještě bez zákmitů.*

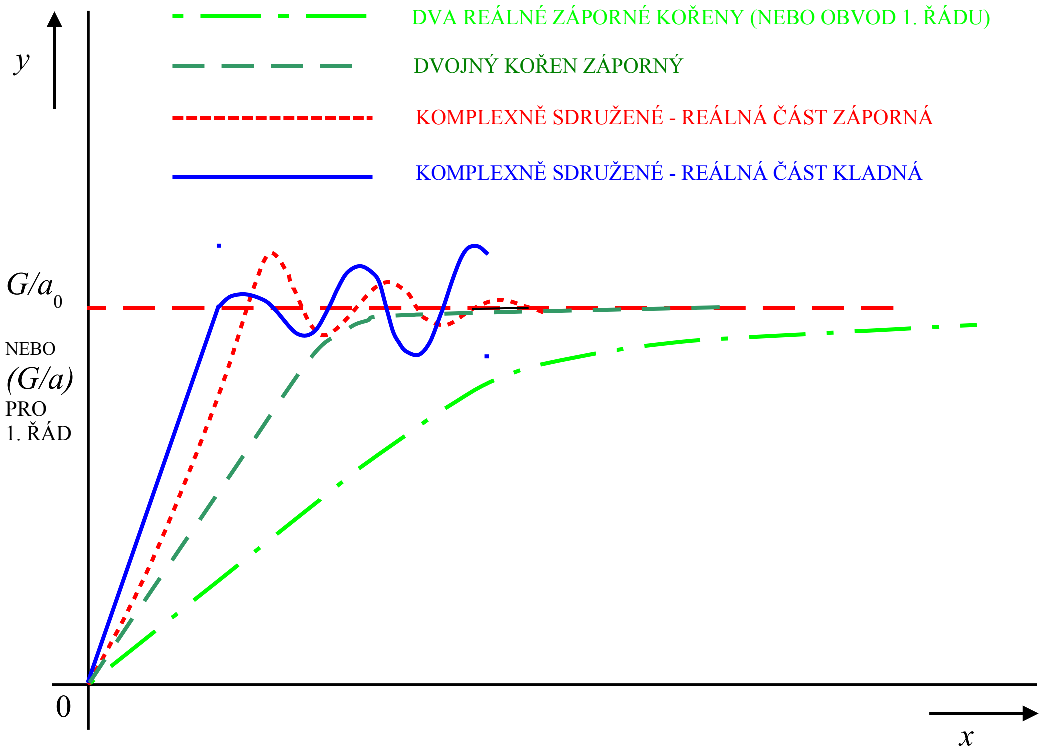
Jsou-li kořeny komplexně sdružené typu $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$, *platí opět vztah (20).* Aplikací Eulerových vztahů lze dospět k popisu typu

$$y = e^{-\alpha x}(S_1 \sin \beta x + S_2 \cos \beta x)$$

Přechodný děj bude probíhat s ***tlumenými kmity*** *při reálné části kořenů* ($-\alpha < 0$) *záporné.*

Přechodný děj bude probíhat s ***narůstajícími (netlumenými) kmity*** *při reálné části kořenů kladné*($-\alpha > 0$).

Kvalitativní zobrazení uvedených skutečností je na obr.1- vždy pro nulovou počáteční podmínku.



Obr.1. Kvalitativní zobrazení řešení diferenciálních rovnic při nulové počáteční podmínce.

Literatura:

[1] Kohlman, Č.: ***Matematika ve sdělovací technice***. SNTL, Praha 1960
[2] Rektorys, K.: ***Co je a k čemu je vyšší matematika.*** ACADEMIA, Praha 2001
[3] Kvasnica, J.: ***Matematický aparát fyziky.*** ACADEMIA, Praha 1997 (2. vydání)
[4] Devlin , K.: ***Jazyk matematiky.*** Argo a Dokořán, Praha 2002
[5] Angot, A.: ***Užitá matematika pro elektrotechnické inženýry.*** SNTL, Praha 1971
[6] Punčochář, J.: ***Exponenciální funkce a jejich "využití" - A***. Pomocné studijní texty leden 2004.